

Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.

ALJABAR MATRIKS ELEMENTER

DISUSUN BERDASARKAN
KURIKULUM TERBARU
NASIONAL
PERGURUAN TINGGI



Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.

ALJABAR MATRIKS ELEMENTER



**PENERBIT CV PUSTAKA SETIA
Bandung**

UNDANG-UNDANG REPUBLIK INDONESIA
NO. 28 TAHUN 2014 TENTANG HAK CIPTA

Pasal 113

- (1) Setiap orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000,00 (seratus juta rupiah).
- (2) Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin pencipta atau pemegang hak cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
- (3) Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin pencipta atau pemegang hak cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk penggunaan secara komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
- (4) Setiap orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

ALJABAR MATRIKS ELEMENTER

ISBN 978-979-076-361-6

Cet. I: April 2013, 16 × 24 cm., 224 hlm.

Penulis: Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.

Desain Sampul: Tim Desain Pustaka Setia

Setting, Montase, Layout: Tim Redaksi Pustaka Setia

Cetakan ke-2: Februari 2019

Diterbitkan oleh:

CV PUSTAKA SETIA

Jl. BKR (Lingkar Selatan) No. 162-164

Telp. (022) 5210588, Faks. (022) 5224105

e-mail: pustaka_seti@yahoo.com

Bandung 40253

(Anggota IKAPI Cabang Jawa Barat)

Copyright © 2013 **CV PUSTAKA SETIA**

Dilarang mengutip memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa seizin tertulis dari penerbit.

Hak penulis dilindungi undang-undang.

All right reserved.



KATA PENGANTAR

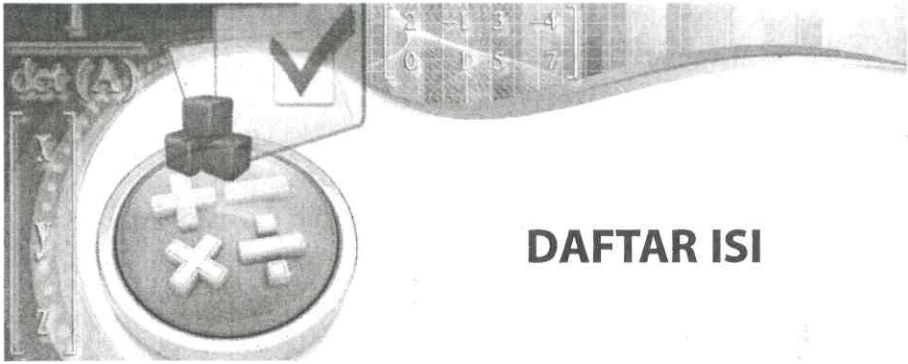
Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT., yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyusun buku berjudul **Aljabar Matriks Elementer**. Buku ini berupa Buku Seri Aktif yang dilengkapi Lembar Aktivitas, dengan tujuan pembaca dapat melakukan aktivitas matematika (*doing math*) dalam memecahkan permasalahan yang diberikan. Latihan soal (*exercise*) diberikan dalam bahasa Inggris yang bertujuan melatih pembaca agar terampil dalam membaca dan memahami buku teks matematika.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saran dan kritik demi penyempurnaan buku ini selalu penulis harapkan.

Akhir kata, semoga buku ini dapat bermanfaat.

Bandung, Februari 2013

Penulis



DAFTAR ISI

BAB 1 KONSEP DASAR MATRIKS (*BASIC CONCEPT OF MATRIKS*)

⇒ 11

- A. Definisi Matriks ⇒ 11
- B. Kegunaan Matriks ⇒ 14
- C. Jenis-jenis Matriks ⇒ 14
 - 1. Matriks Bujursangkar (*Square Matrix*) ⇒ 14
 - 2. Matriks Identitas (*Identity Matrix*) ⇒ 15
 - 3. Matriks Diagonal (*Diagonal Matrix*) ⇒ 16
 - 4. Matriks Segitiga (*Triangle Matrix*) ⇒ 16
 - 5. Matriks Nol (*Null Matrix*) ⇒ 17
 - 6. Matriks Skalar (*Scalar Matrix*) ⇒ 17
 - 7. Matriks Simetris (*Symmetric Matrix*) ⇒ 17

Lembar Aktivitas 1.1 ⇒ 18

- D. Transpose suatu Matriks ⇒ 20
- E. Trace suatu Matriks Bujursangkar ⇒ 22

Lembar Aktivitas 1.2 ⇒ 23

- F. Operasi pada Matriks ⇒ 23
 - 1. Kesamaan Matriks ⇒ 23
 - 2. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks ⇒ 24
 - 3. Perkalian Matriks ⇒ 27

Lembar Aktivitas 1.3 ⇒ 36

- G. Penerapan Matriks ⇒ 36
- H. Sifat-sifat Utama dari Operasi Transpose Matriks yang Berkaitan dengan Operasi Matriks secara Umum ⇒ 39

- I. Matriks-matriks yang Berbentuk $A.A^T$ dan $A^T.A \Rightarrow 40$
 Lembar Aktivitas 1.4 $\Rightarrow 42$
Exercise 1.1 $\Rightarrow 43$
- J. Sifat-sifat Utama dari Operasi Trace Matriks yang Berkaitan dengan Operasi Matriks secara Umum $\Rightarrow 44$
- K. Hasil Kali Matriks sebagai Kombinasi Linear $\Rightarrow 45$
 Lembar Aktivitas 1.5 $\Rightarrow 47$
- L. Pangkat suatu Matriks $\Rightarrow 48$
 Lembar Aktivitas 1.6 $\Rightarrow 50$
- M. Matriks-matriks yang Mengandung Polinom $\Rightarrow 53$
 Lembar Aktivitas 1.7 $\Rightarrow 54$
- N. Matriks Partisi (*Partition Matrix*) $\Rightarrow 59$
 Lembar Aktivitas 1.8 $\Rightarrow 60$
 - 1. Penjumlahan dan Pengurangan dengan Bantuan Matriks Partisi $\Rightarrow 61$
 - 2. Perkalian Matriks dengan Bantuan Matriks Partisi $\Rightarrow 64$
 Lembar Aktivitas 1.9 $\Rightarrow 67$
Exercise 1.2 $\Rightarrow 68$

BAB 2 SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS) $\Rightarrow 71$

- A. Pengantar Sistem Persamaan Linear (*Introduction to System of Linear Equations*) $\Rightarrow 71$
 - 1. Persamaan Linear $\Rightarrow 71$
 - 2. Penyelesaian Persamaan Linear (*Solution of Linear Equations*) $\Rightarrow 72$
- B. Sistem Linear (*Linear System*) $\Rightarrow 73$
 - 1. Sistem Persamaan Linear dalam Dua Peubah (*System of Linear Equations in Two Variables*) $\Rightarrow 74$
 - 2. Penerapan Sistem Persamaan Linear dalam Dua Peubah $\Rightarrow 75$
 - 3. Sistem Persamaan Linear dalam Tiga Peubah (*System of Linear Equations in Three Variables*) $\Rightarrow 76$
 - 4. Penerapan Sistem Persamaan Linear dalam Tiga Peubah $\Rightarrow 79$
 Lembar Aktivitas 2.1 $\Rightarrow 81$

5. Kemungkinan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
 \Rightarrow 82
- C. Matriks-matriks yang Diperbanyak (*the Augmented Matrix*) \Rightarrow 85
 Lembar Aktivitas 2.2 \Rightarrow 86
- D. Bentuk Matriks dari suatu Sistem Linear \Rightarrow 87
- E. Operasi Baris Elementer (*Elementary Row Operations*)
 \Rightarrow 88
 Lembar Aktivitas 2.3 \Rightarrow 91
Exercise 2.1 \Rightarrow 92
- F. Eliminasi Gaussian (*Gaussian Elimination*) \Rightarrow 93
 1. Bentuk Baris Eselon Tereduksi (*Reduced Row-Echelon Form*) \Rightarrow 93
 Lembar Aktivitas 2.4 \Rightarrow 97
 2. Penerapan Reduksi Baris dalam Menyelesaikan Permasalahan Sehari-hari \Rightarrow 98
Exercise 2.2 \Rightarrow 104
- G. Sistem Persamaan Linear Homogen (*Homogenous System of Linear Equations*) \Rightarrow 107
 Lembar Aktivitas 2.5 \Rightarrow 111

BAB 3 INVERS SUATU MATRIKS (INVERSE OF MATRIXES) \Rightarrow 115

- A. Pengertian Invers suatu Matriks \Rightarrow 115
- B. Mencari Invers suatu Matriks Bujursangkar Berordo 2 \Rightarrow 117
 Lembar Aktivitas 3.1 \Rightarrow 119
- C. Metode Counter untuk Mencari Invers suatu Matriks \Rightarrow 121
 Lembar Aktivitas 3.2 \Rightarrow 124
- D. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan Invers Matriks \Rightarrow 125
 Lembar Aktivitas 3.3 \Rightarrow 127
Exercise 3.1 \Rightarrow 129
- E. Mencari Invers suatu Matriks dengan Matriks Partisi \Rightarrow 130
Exercise 3.2 \Rightarrow 137

BAB 4 DETERMINAN (DETERMINANT) \Rightarrow 139

- A. Fungsi Determinan (*Determinant Function*) \Rightarrow 139

1. Permutasi \Rightarrow 139
Lembar Aktivitas 4.1 \Rightarrow 140
Lembar Aktivitas 4.2 \Rightarrow 143
2. Pengertian Determinan \Rightarrow 144
Exercise 4.1 \Rightarrow 149
3. Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris \Rightarrow 150
Lembar Aktivitas 4.3 \Rightarrow 159
4. Determinan dari suatu Matriks dengan Baris dan Kolom Proporsional \Rightarrow 160
5. Determinan Matriks-matriks Elementer \Rightarrow 161
Lembar Aktivitas 4.4 \Rightarrow 162
Exercise 4.2 \Rightarrow 163
- B. Sifat-sifat Fungsi Determinan \Rightarrow 165
Exercise 4.3 \Rightarrow 167

BAB 5 PERLUASAN KOFAKTOR (COFACTOR EXPANSION) \Rightarrow 169

- A. Minor dan Kofaktor \Rightarrow 169
Lembar Aktivitas 5.1 \Rightarrow 172
Lembar Aktivitas 5.2 \Rightarrow 177
Lembar Aktivitas 5.3 \Rightarrow 183
Exercise 5.1 \Rightarrow 185
- B. Matriks Adjoin \Rightarrow 186
Lembar Aktivitas 5.4 \Rightarrow 191
Exercise 5.2 \Rightarrow 197

BAB 6 ATURAN CRAMER (CRAMER'S RULE) \Rightarrow 199

- Lembar Aktivitas 6.1 \Rightarrow 205
Exercise 6.1 \Rightarrow 207

BAB 7 NILAI EIGEN (EIGEN VALUE) \Rightarrow 209

- Lembar Aktivitas 7.1 \Rightarrow 212
Exercise 7.1 \Rightarrow 216

DAFTAR PUSTAKA \Rightarrow 217

LAMPIRAN \Rightarrow 219



A. Definisi Matriks

Matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom, dan diletakkan di antara dua tanda kurung.

Bentuk umum sebuah matriks adalah:

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{\text{baris}} \\
 \downarrow \text{kolom}
 \end{array}$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh matriks berikut ini!

Contoh 1.1

Berikut ini beberapa contoh matriks:

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } [9 \quad -2 \quad 5]$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} -9 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{e. } [4]$$

$$\text{c. } \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan jumlah kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalnya, pada contoh 1.1a, matriks tersebut mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (ditulis 3×2).

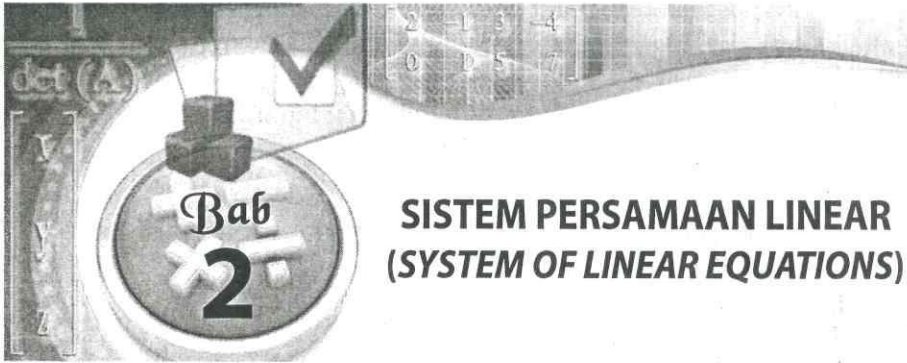
Dalam suatu ukuran matriks, angka pertama menyatakan jumlah baris, dan angka kedua menyatakan jumlah kolom. Jika kita tinjau kembali maka matriks-matriks pada contoh 1.1b, 1.1c, 1.1d, dan 1.1e masing-masing mempunyai ukuran 3×3 ; 2×1 ; 1×3 ; dan 1×1 .

Sebuah matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut *matriks kolom* (contoh 1.1c) dan sebuah matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut *matriks baris* (contoh 1.1d). Selanjutnya, kita akan menggunakan huruf besar untuk menyatakan matriks dan huruf kecil untuk mewakili bilangan.

Contoh 1.2

Tinjau matriks berikut, $A =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS)

A. Pengantar Sistem Persamaan Linear (*Introduction to System of Linear Equations*)

1. Persamaan Linear

Sebuah garis dalam bidang $x - y$ dapat disajikan secara aljabar dengan sebuah persamaan berbentuk:

$$a_1x + a_2y = b$$

Persamaan jenis ini disebut *persamaan linear dalam peubah x dan y* (*linear equations in x and y variables*). Secara umum, persamaan linear dalam n peubah x_1, x_2, \dots, x_n , didefinisikan sebagai suatu persamaan yang dapat disajikan dalam bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

dengan a_1, a_2, \dots, a_n dan b adalah *konstanta real*. Peubah-peubah dalam suatu persamaan linear, yaitu x_1, x_2, \dots, x_n kadang-kadang disebut *yang tidak diketahui*.

Berikut ini contoh-contoh persamaan linear:

- $x + 3y = 7$
- $y = \frac{1}{2}x + 3z$
- $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$
- $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

Jika kita perhatikan, suatu persamaan linear tidak mengandung hasil kali akar atau akar suatu peubah. Semua peubah hanya muncul satu kali dengan pangkat satu dan tidak muncul sebagai peubah bebas dari sebuah fungsi trigonometri, logaritma, atau eksponensial.

Contoh 2.1

Beri alasan mengapa yang berikut ini bukan contoh persamaan linear!

- $x + 3y^2 = 9$
- $y - \sin x = 0$
- $3x + 2y - z + xz = 8$
- $\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$

Jawab:

- ada peubah yang berpangkat 2;
- mengandung fungsi trigonometri;
- terdapat hasil kali peubah;
- mengandung akar suatu peubah.

2. Penyelesaian Pesamaan Linear (*Solution of Linear Equations*)

Suatu penyelesaian dari suatu persamaan linear:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

adalah sederetan n angka s_1, s_2, \dots, s_n sedemikian sehingga persamaan tersebut terpenuhi jika kita mensubstitusikan:

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$$

Himpunan semua penyelesaian persamaan tersebut dinamakan *himpunan penyelesaian (solution set)* atau kadang-kadang dinamakan sebagai penyelesaian umum persamaan (*equation's general solution*).

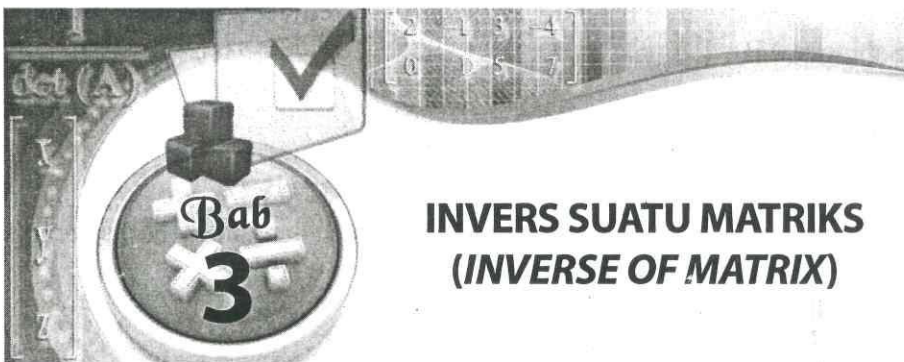
Contoh 2.2

Cari himpunan penyelesaian dari persamaan linear berikut:

- $4x - 2y = 1$
- $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$

Jawab:

- Misalnya, $x = t$ atau $y = t$
 $\Leftrightarrow 4t - 2y = 1 \qquad \Leftrightarrow 4x - 2t = 1$



INVERS SUATU MATRIKS (INVERSE OF MATRIX)

A. Pengertian Invers suatu Matriks

Definisi

Jika A adalah suatu matriks bujursangkar (matriks kuadrat), dan jika kita dapat mencari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan *dapat dibalik (invertible)* dan B dinamakan *invers (inverse)* dari A.

Contoh 3.1

Tinjaulah matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan AB dan BA!

Jawab:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sehingga } AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

A dan B dikatakan *saling invers*.

B dikatakan invers dari A, dan ditulis A^{-1} , sehingga $B = A^{-1}$.

Jadi, $AB = A.A^{-1} = I$. A dikatakan invers dari B, dan ditulis B^{-1} , sehingga $A = B^{-1}$. Jadi, $BA = B.B^{-1} = I$.

Contoh 3.2

Tinjaulah matriks-matriks berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$$

Tentukan PQ dan QP!

Jawab:

$$PQ = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$QP = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sehingga, } PQ = QP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

P dan Q dikatakan *saling invers*. Q dikatakan invers dari P, dan ditulis P^{-1} , sehingga $Q = P^{-1}$. Jadi, $PQ = P.P^{-1} = I$.

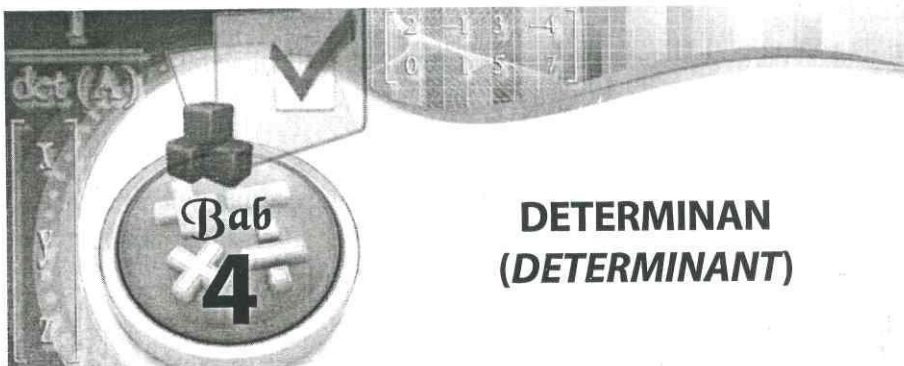
P dikatakan invers dari Q, dan ditulis Q^{-1} , sehingga $P = Q^{-1}$. Jadi, $QP = Q.Q^{-1} = I$.

Contoh 3.3

Tinjaulah matriks-matriks berikut:

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } S = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan RS dan SR!



DETERMINAN (DETERMINANT)

A. Fungsi Determinan (*Determinant Function*)

Pada pembahasan sebelumnya, kita mengetahui bahwa:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik (mempunyai invers) jika $ad - bc \neq 0$. Bentuk $ad - bc$ dinamakan *determinan* dari matriks 2×2 dan dinyatakan dengan simbol $\det(A)$. Dengan notasi ini, invers dari A , dapat dinyatakan sebagai:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Salah satu sasaran bahasan kali ini adalah memperoleh analogi dari rumus ini untuk matriks-matriks yang berordo tinggi. Pengkajian dimulai dari fungsi determinan, yaitu suatu fungsi yang menghubungkan suatu bilangan real $f(x)$ dengan suatu matriks X . Akan tetapi, sebelumnya kita perlu mengkaji terlebih dahulu tentang “permutasi”.

1. Permutasi

Definisi

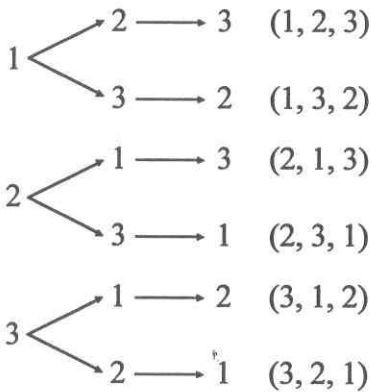
Suatu permutasi himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, n\}$ adalah suatu susunan bilangan bulat tersebut dalam suatu urutan tanpa pengulangan.

Contoh 4.1

Tentukan permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3\}$!

Jawab:

Permutasi-permutasi tersebut adalah $(1, 2, 3)$; $(1, 3, 2)$; $(2, 1, 3)$; $(2, 3, 1)$; $(3, 1, 2)$; dan $(3, 2, 1)$. Jadi, ada 6 buah permutasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$. Suatu metode yang mudah untuk mendaftarkan permutasi secara sistematis adalah dengan menggunakan suatu *pohon permutasi*.

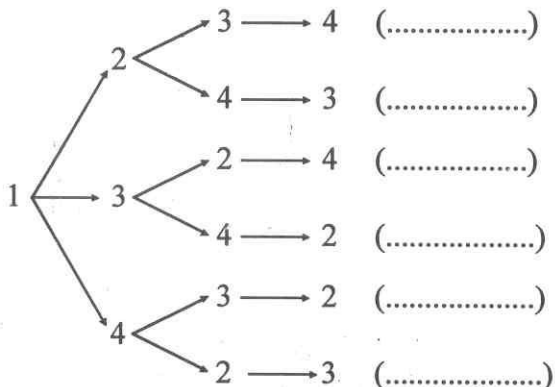


Lembar Aktivitas 4.1

Tentukan permutasi yang berbeda dari himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, 4\}$!

Jawab:

Dengan menggunakan pohon permutasi didapat:





Pada bagian ini, kita akan mempelajari suatu metode untuk menghitung determinan yang berguna jika kita menghitung secara manual. Sebagai konsekuensinya, kita akan memperoleh suatu rumus untuk invers dari suatu matriks yang dapat dibalik dan juga rumus untuk mencari penyelesaian suatu sistem persamaan linear.

A. Minor dan Kofaktor

Definisi

Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka *minor anggota* a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang masih tersisa setelah baris ke- i dan kolom ke- j dihilangkan dari A . Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut *kofaktor anggota* a_{ij} .

Contoh 5.1

Tinjaulah matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Minor anggota a_{11} adalah:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \\
 &= (5)(8) - (4)(6) \\
 &= 40 - 24 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

Kofaktor anggota a_{11} adalah:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} \\
 &= (-1)^2 \cdot 16 \\
 &= 1 \cdot 16 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

- Minor anggota a_{21} adalah:

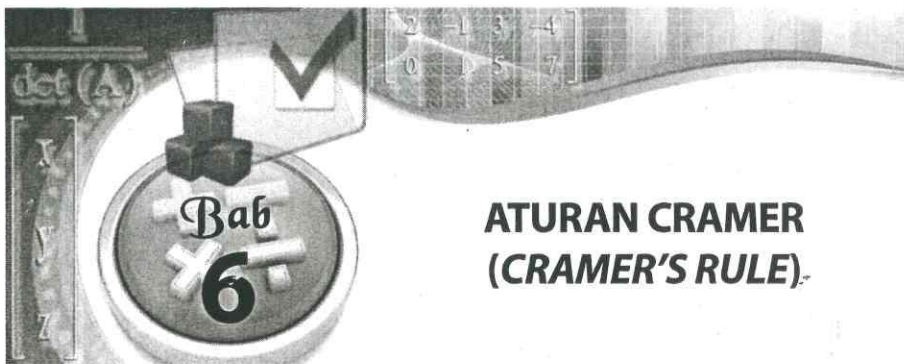
$$\begin{aligned}
 M_{21} &= \begin{vmatrix} \cancel{3} & 1 & -4 \\ \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \\
 &= (1)(8) - (4)(-4) \\
 &= 8 + 16 \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

Kofaktor anggota a_{21} adalah:

$$\begin{aligned}
 C_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} \\
 &= (-1)^3 \cdot 24 \\
 &= -1 \cdot 24 \\
 &= -24
 \end{aligned}$$

- Minor anggota a_{31} adalah:

$$\begin{aligned}
 M_{31} &= \begin{vmatrix} \cancel{3} & 1 & -4 \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= (1)(6) - (5)(-4) \\
 &= 6 + 20 \\
 &= 26
 \end{aligned}$$



ATURAN CRAMER (CRAMER'S RULE)

Aturan Cramer merupakan salah satu rumus yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian suatu sistem persamaan linear tertentu dengan n persamaan dan n peubah. Sebelum menurunkan rumus aturan Cramer, kita ingat kembali teorema yang menyatakan:

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ yang dapat dibalik, maka untuk setiap matriks b , $n \times 1$, sistem persamaan $Ax = b$ tepat mempunyai satu penyelesaian, yaitu $x = A^{-1} \cdot b$ ()*

Teorema 6.1

Menurut aturan Cramer

Jika $Ax = b$ merupakan suatu sistem linear dengan n persamaan dan n peubah, sedemikian sehingga $\det(A) \neq 0$, maka sistem tersebut mempunyai satu penyelesaian, yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \dots \dots \dots (**)$$

Dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom ke- j dengan anggota-anggota pada matriks:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bukti:

Kita akan buktikan bentuk (**). Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \text{ maka } A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Anggota-anggota pada kolom pertama dari A diganti dengan anggota-anggota pada matriks b

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Anggota-anggota pada kolom kedua dari A diganti dengan anggota-anggota pada matriks b

dan seterusnya hingga:



Bab 7

NILAI EIGEN (*EIGEN VALUE*)

Definisi

Misalkan, A adalah matriks $n \times n$, vektor tidak nol x di dalam R^n dinamakan *vektor eigen dari A* jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu:

$$Ax = \lambda x, \text{ untuk suatu skalar } \lambda.$$

Skalar λ dinamakan *nilai eigen dari A* dan x dinamakan *vektor eigen yang bersesuaian dengan λ* .

Contoh 7.1

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian

dengan nilai eigen $\lambda = 3$ karena:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ kita dapat menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = \lambda I x$ atau secara ekuivalen:

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tidak nol dari persamaan tersebut. Sistem $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai suatu penyelesaian *tidak trivial* jika dan hanya jika $\det(\lambda I - A) = 0$.

Bentuk $\det(\lambda I - A) = 0$ dinamakan *persamaan karakteristik A*; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Apabila diperluas, maka $\det(\lambda I - A)$ adalah polinom λ yang dinamakan *polinom karakteristik dari A*.

Contoh 7.2

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks A dan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Polinom karakteristik dari A adalah:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

sehingga persamaan karakteristik A adalah:

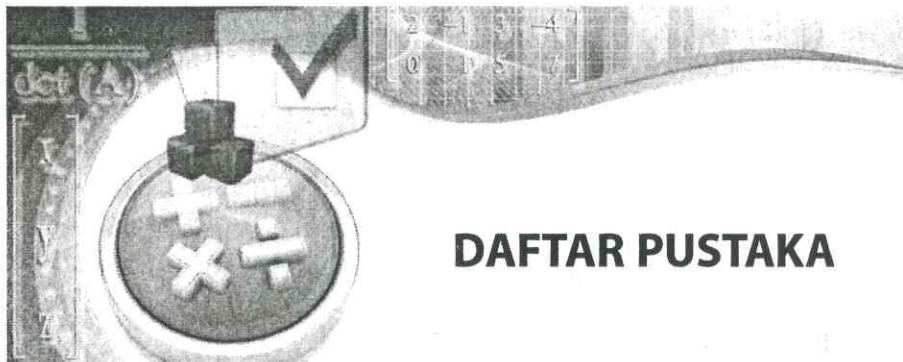
$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \\ \lambda &= 1 \text{ atau } \lambda = 2 \end{aligned}$$

Pemecahan-pemecahan persamaan ini adalah $\lambda = 1$ atau $\lambda = 2$.

Jadi, nilai-nilai eigen dari matriks A adalah 1 dan 2.

Vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ adalah suatu vektor eigen dari A jika dan hanya jika x

adalah suatu penyelesaian tidak-trivial dari $(\lambda I - A)x = 0$, yaitu:



DAFTAR PUSTAKA

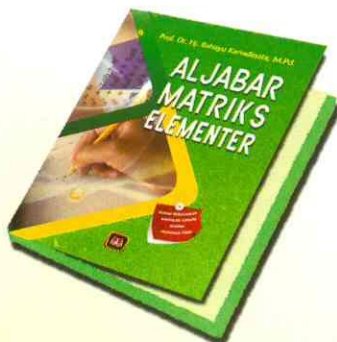
- Andrianto, H. dan Prijono, A. *Menguasai Matriks dan Vektor*. Bandung: Rekayasa Sains. 2006.
- Anton, H. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi Kelima. Alih Bahasa: Pantur Silaban dan Nyoman Susila (ITB). Jakarta: Erlangga. 1987.
- . *Elementary Linear Algebra*. Third Edition. New York: John Wiley & Sons. 1971.
- . *Dasar-dasar Aljabar Linear*. Edisi Ketujuh Jilid 1. Alih Bahasa: Hari Suminto, Lyndon Saputra. Batam Center: Interaksara. 2000.
- Ayres, F. *Matriks. Seri Buku Schaum, Teori dan Soal*. Alih Bahasa: I. Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga. 1992.
- Gultom, B. *Teori Aljabar Linear*. Bandung: Tarsito. 1985.
- Hadley, G. *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing Co. Translation Copyright 1983. *Aljabar Linear*. Alih Bahasa: Naipospos, Noeniek Soemartoyo. Jakarta: Erlangga. 1961.
- Jacob, B. *Linear Algebra*. New York: W.H. Freeman and Company. 1990.
- Mulyana, T. dan Karso. *Aljabar Linear*. Buku Materi Pokok PAMA4112/4SKS/MODUL 1–12. Pusat Penerbitan Universitas Terbuka. 2003.
- Rasyad, R. *Aljabar Linear untuk Umum*. Jakarta: Grasindo. 2003.

- Seymour Lipschutz, March Lipson. *Linear Algebra*. Third Edition. Schaum's Outlines. Translation Copyright 2006. *Aljabar Linear*. Edisi Ketiga. Alih Bahasa: Refina Indriasari. Jakarta: Erlangga. 1968.
- Steven J. Leon. *Linear Algebra with Applications*. Fifth Edition. Prentice-Hall, Inc. Translation Copyright 2006. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Alih Bahasa: Ali Bondan. Jakarta: Erlangga. 1998.
- Supranto, J. *Pengantar Matrix*. Jakarta: Rineka Cipta. 1998.
- Sutojo, T., dkk. *Teori dan Aplikasi Aljabar Linear dan Matriks dengan Implementasi Aljabar Linear dan Matriks Menggunakan Matlab*. Yogyakarta: Andi Offset. 2010.
- Wirodikromo, S. *Matematika untuk SMU Jilid 4 Kelas 2 Caturwulan I*. Jakarta: Erlangga. 1997.
- . *Matematika 2000 untuk SMU Jilid 2 Kelas 1 Caturwulan II*. Jakarta: Erlangga. 2000.
- Wiwiek A. *Aljabar Linear Dilengkapi dengan Program Matlab*. Yogyakarta: Graha Ilmu. 2006.



ALJABAR MATRIKS ELEMENTER

Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.



- Konsep Dasar Matriks
- Sistem Persamaan Linier
- Invers Suatu Matriks
- Determinan
- Perluasan Kofaktor
- Aturan Cramer's
- Nilai Eigen

Beberapa persoalan yang muncul dalam kehidupan sehari-hari seringkali dapat diselesaikan dengan memakai model matematika yang berbentuk sistem persamaan linear. Akan tetapi, setiap sistem persamaan linear mungkin tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai tepat satu penyelesaian, atau mempunyai tak-hingga banyaknya penyelesaian. Adapun matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom, dan diletakkan di antara dua tanda kurung.

Buku ini merupakan buku seri aktif belajar aljabar matriks elementer yang dilengkapi dengan lembar aktivitas, dengan tujuan agar pembaca dapat melakukan aktivitas matematika (*doing math*) dalam memecahkan soal dan permasalahan yang diberikan. Selain itu, dilengkapi juga latihan soal (*exercise*) dalam bahasa Inggris yang bertujuan melatih pembaca agar terampil dalam membaca dan memahami buku teks matematika.



PENERBIT **PUSTAKA SETIA**

Jl. BKR (Lingkar Selatan) No. 162-164
Telp. (022) 5210588 | Fax. (022) 5224105
E-mail. pustaka_seti@yahoo.com
BANDUNG 40253

ISBN : 978-979-076-361-6



ALJABAR MATRIKS ELEMENTER